Logarithmic vector Fields and a Generalized Coxeter Equality (Analytic Variety上の諸問題)

寺尾, 宏明

数理解析研究所講究録
387巻 1980年 29-37

Logarithmic Vector Fields and a Generalized Coxeter Equality

国際基督教大 寺尾宏明

§0. Introduction

この小論で、我々は、free divisorと呼ばれるある種のdivisorについてのいくつかの性質を述べたい。free divisorなる概念は、与えられたdivisorに沿ったlogarithmic vector fieldのgermsのなすsheafの性質を使って定義される(→§1)。free divisorの代表的なものとしては、次のものがある;

1) smooth divisor,
2) isolated hypersurface singularityのsemi-universal deformationのdiscriminant,
3) Coxeter群の鏡映面のunionが作るdivisor (in $\mathbb{C}^n$).

この3)のdivisorを我々は、<u>Coxeter arrangement</u>と呼ぶ。Coxeter群には、exponentsなるものが存在して、そのexponentsがCoxeter群の最短分解や、Coxeter arrangementの組み合わせ的性質と美しい関係をもつことは、よく

知られている。([2])

ここで我々は、exponentsの概念を(適当な条件のもとで)任意のfree divisorに拡張する。そして、新たに定義されたexponentsが依然として、divisorの幾何学的性質と美しい関係をもっていることを述べる。

§1. Free divisorのdefinition

Xを$(n+1)$-次元複素多様体(smooth)として、DをXのdivisorとする。QをDの$x\in X$に於ける defining equationとする。そして、

$$\Omega^1(\log D)_x := \{\omega;\ \text{germ at } x \text{ of meromorphic form s.t. } Q\cdot\omega \text{ and } Q\cdot(d\omega) \text{ are both holomorphic}\}$$

と定義すれば、$\Omega^1(\log D)_x$は自然に$\mathcal{O}_{X,x}$-moduleの構造をもち、$\bigcup_{x\in X}\Omega^1(\log D)_x$には coherent $\mathcal{O}_X$-Moduleの構造がはいる。そのsheafを、$\Omega^1(\log D)$と書く。また、

$$\mathrm{Der}(\log D)_x := \{\theta;\ \text{germ at } x \text{ of holomorphic vector field s.t. } \theta\cdot Q\in Q\cdot\mathcal{O}_{X,x}\}$$

と定義すると、同様に、$\bigcup_{x\in X}\mathrm{Der}(\log D)_x$には coherent

$\mathcal{O}_X$-Module がはいる。これを $Der(\log D)$ と書く。

$\Omega^1(\log D)$ と $Der(\log D)$ を各々、D に沿っての log 1-form の germs のなす sheaf, D に沿っての log vector fields の germs のなす sheaf とよぶ。

Definition 1. D が $x \in X$ で <u>free</u> であるとは、$\Omega^1(\log D)_x$ が free $\mathcal{O}_{X,x}$-module であることをいう。

Remark. $\Omega^1(\log D)$ と $Der(\log D)$ との間に、non-degenerate pairing があることから、

D: free at $x \in X \Longleftrightarrow Der(\log D)_x$ が free $\mathcal{O}_{X,x}$-module

が云える。

Proposition 2. Q が quasi-homogeneous とせよ。そのとき、

D: free at $x \Longleftrightarrow$ D: smooth at x
or
$\mathcal{O}_{X,x}/J(Q)_x$: Cohen-Macaulay of Krull dim $(n-1)$.

(但、$J(Q)$ は、Q の Jacobian ideal)。

Definition 3. Dが free とは、Dが free at ${}^\forall x \in X$ をいう.

Free divisor の例としては、§0にあげたようなものがあるが、その中で、Coxeter arrangement とその exponent についての結果を復習してみよう.

Wを$GL(n+1,\mathbb{R})$の subgroup で、直交鏡映で生成されるとせよ。このとき、Wは、$\mathbb{C}[z_0,\cdots,z_n]$ に act して、その不変式全体の集合を、$\mathbb{C}[z_0,\cdots,z_n]^W$ で表わそう. Wが有限群のとき、$P_0,\cdots,P_n$ なる同次多項式が存在して、

$$\mathbb{C}[z_0,\cdots,z_n]^W = \mathbb{C}[P_0,\cdots,P_n]$$

となり、しかも、$P_0,\cdots,P_n$ は（$\mathbb{C}$上）代数的に独立である. このとき、

$$\{\deg P_i - 1\}_{i=0,\cdots,n}$$

は、P_i たちの選び方によらずに決まる。これらの$(n+1)$ケの整数を、exponent とよぶ.

これら exponent の意味を明らかにするため、

$\pi_0,\cdots,\pi_{n+1} \in \mathbb{C}[y_0,\cdots,y_n]$ を、

$$\prod_{i=0}^{n}(t+y_i) = \sum_{k=0}^{n+1}\pi_k t^k$$

によって、定義する。このとき、Coxeter は、次の美しい結果を示した。([2])

Theorem 4. $(d_0, \cdots, d_n)$ を、Coxeter arrangement D の exponents とする。このとき、$k+k'=n+1$ なら、

$$\pi_k(d_0, \cdots, d_n) = \#\{w \in W \,;\, l(w) = k'\}$$
$$= b_{k'}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus D) \quad (\mathbb{C}^{n+1} \setminus D \text{ の } k' \text{次 Betti 数}) \quad (k=0, \cdots, n+1)$$

が成立している。但し、$l(w)$ は、w の最短分解([1])の長さを表わす。

従って、

$$\prod_{i=0}^{n}(1+d_i) = \sum_{k=0}^{n+1} \pi_k = \# W = f(D)$$

が成立する。ここで、$f(D)$ とは、$D_{\mathbb{R}}$ を D の real form としたときの、$\mathbb{R}^{n+1} \setminus D_{\mathbb{R}}$ の連結成分(i.e. Weyl chamber)の個数のことである。

Definition 5. $Q \in \mathbb{R}[z_0, \cdots, z_n]$ を、1次同次式の積で square-free なものとする。D を、

$$D = \{(c_0, \cdots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \,;\, Q(c_0, \cdots, c_n) = 0\}$$

と定義すると、Dは、$\mathbb{C}^{n+1}$の中で、原点を通るような有限枚のhyperplanesのunionになる。このDを、我々は、__arrangement__とよぶ。

Definition 6. Arrangement Dが、freeなとき、$\mathrm{Der}(\log D)_0$のhomogeneous basisの"degree"を、Dの__exponent__とよぶ。ただし、homogeneous vector fieldのdegreeとは、

$$\deg\left(\sum f_i \frac{\partial}{\partial z_i}\right) = \deg f_i \quad (f_i \neq 0)$$

で、定義するものとする。

このとき、我々は、定理4を拡張して、次の結果を示すことができる。

Theorem 7. Dを、free arrangementとして、そのexponentを、$(d_0, \cdots, d_n)$とする。そのとき、$k+k'=n+1$ならば、

$$\pi_k(d_0, \cdots, d_n) = b_{k'}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus D) \quad (k=0, \cdots, n+1)$$

$$\prod_{i=0}^{n}(1+d_i) = f(D)$$

但し、f(D)の定義は、Coxeter arrangementのときに

準じるものとする.

この定理の証明には、次のふたつの結果を使う.

i) Dが free であるということから、$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}/J(Q)_0$ の Hilbert polynomial が、組み合わせ的に計算できるという事実,

ii) Zaslavsky による face-counting formula of an arrangement ([8]).

証明の詳細は、[7]に書かれる予定である. ($n=2$ のときは、別証が [6] にある)

Theorem 7のひとつの応用として、与えられたarrangement が、non-free なことの十分条件が得られる。例えば、$n=2$, $\pi_1=13$, $f(D)=52$ なる arrangement D で、simplicial であるものが、存在する([4])が、これをみたすようなexponents は存在しないので、Dは free でないことになる。これは、次の予想の $\Leftarrow$ 方向の implication の反例になっている(cf. [3]).

<u>Conjecture</u>: Dを、$(n+1)$-次元 complex manifold の divisor とするとき、

$$D : \text{free at } x \in X \Leftrightarrow {}^{\exists}V\text{; a nbd of } x \text{ s.t. } V \setminus V \cap D \text{ is } K(\pi, 1).$$

この Conjecture は、最初、斎藤恭司によって、提出されたもので、我々の研究のひとつの motivation であった。

また、⇒方向の implication について、最近、河野俊丈と筆者によって、反例が存在することが示された。([5] にある arrangement の freeness の criterion と、de Rham homotopy theory を用いる)

しかし、多くの例が示すように、log 1-form の構造が"何らかの形で" higher homotopy と密接な関連を持っていることは確かと思われる。

REFERENCES

[1] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie, Chap. 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1968.

[2] H.S.M. Coxeter, The product of generators of a finite group generated by reflections, Duke Math. J. 18 (1951), 765–782.

[3] P. Deligne, Les immeubles des groupes et tresses generalisés, Invent. Math. 17 (1972), 273-302.

[4] B. Grünbaum, Arrangements of hyperplanes, Proc. Second Louisiana Conference on Combinatorics and Graph Theory, Baton Rouge, (1971).

[5] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness I (to appear in Proc. of Fac. of Sci., Univ. of Tokyo (1980)).

[6] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness II — the Coxeter equality — (to appear).

[7] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and a generalized Coxeter equality (in preparation).

[8] T. Zaslavsky, Facing up to Arrangements: Face-Count Formulas for Partitions of Spaces by Hyperplanes, Memoirs of AMS No. 154, Providence, (1975).